Ein neuer Beweis des Abel'schen Theorems*

Carl Jacobi

1.

Es seien zwischen den n Variablen λ_1, λ_2, $\cdots$ λ_n und der Variablen t die Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \dfrac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2 d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \dfrac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2^2 d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n^2 d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \dfrac{\lambda_1^{n-2} d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2^{n-2} d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n^{n-2} d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \\ \dfrac{\lambda_1^{n-1} d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \dfrac{\lambda_2^{n-1} d\lambda_2}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \cdots + \dfrac{\lambda_n^{n-1} d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = dt, \end{cases}$$

*Originaltitel: "Demonsteratio nova theorematis Abeliani", zuerst publiziert in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 24* (1842, geschrieben 1842): pp. 28 – , Nachdruck in: Jacobi's Gesammelte Werke, pp. 65–74, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

während $f(\lambda)$ eine Funktion der Größe λ der Ordnung $(2n-1)$ ist. Durch Setzen von

$$N_k = (\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\cdots(\lambda_k - \lambda_n),$$

wo der verschwindende Faktor $(\lambda_k - \lambda_k)$ wegzulassen ist, folgen aus den Gleichungen (1.) diese:

$$(2.) \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{N_1}, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{N_2}, \cdots, \frac{d\lambda_n}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{N_n}.$$

Es ist nämlich ersichtlich, dass durch Einsetzen von (2.) den Gleichungen (1.) durch bekannte algebraische Formeln Genüge geleistet wird. Von den Formeln (1.) hat man ohne Zutun transzendente Integrale; um algebraische Integrale derselben zu finden, möchte ich ein Lemma, entnommen aus der der einfachen Brüche, vorausschicken.

2.

Vor einiger Zeit hat der illustre Lagrange in den Actis Acad. Bero. vom Jahre 1792 Formeln von dieser Art für die Zerlegung eines Bruches in einfache angegeben, welche keine Veränderung erfahren, wenn mehrere Faktoren des Nenners einander gleich sind. Weil der illustre Autor diese Formeln ohne Beweis vorgelegt hatte, habe ich sie nach Hinzufügen eines Beweises in der Abhandlung *Disquistiones analyticae de fractionibus simplicibus* (Berlin 1825, ap. Herbig) behandelt. Ich habe ich dieser Stelle die Lagrange'sche Proposition auf diese zurückgeführt:

Nachdem der Bruch $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, dessen Nenner $\varphi(x)$ den Faktor $x-\alpha$ enthalte, in einfache Brüche aufgelöst worden ist, wird der Anteil der einfachen Brüche, welcher aus jenem Faktor seinen Ursprung nimmt, so oft der Nenner $\varphi(x)$ ihn enthält, dem Koeffizienten des Terms $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{\psi(\alpha+h)}{\varphi(\alpha+h)(x-\alpha-h)}$$

gleich, wenn selbiger zuvor nach aufsteigenden Potenzen von h entwickelt worden ist.

Einen einfachen Beweis dieser Proposition findet man in der erwähnten Abhandlung in § 10. Dieselbe Proposition habe ich auch so dargeboten (siehe § 7):

Wenn die höchste Potenz des Faktors $x - \alpha$, durch welche der Nenner $\varphi(x)$ geteilt werden kann, $(x-\alpha)^m$ ist und

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\Pi(x)}{(x-\alpha)^m}$$

gesetzt wird, wird das Aggregat der einfachen Brüche, deren Nenner die Potenzen seines Faktors sind, der Größe

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} \cdot \frac{\Pi\alpha}{x-\alpha}}{\partial\alpha^{m-1}}$$

gleich.

Es sei $\psi(\lambda)$ eine ganz rationale Funktion von λ und es sei der Bruch

$$\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)]^m}$$

vorgelegt, der in einfache Brüche aufzulösen ist. Nach der vorhergehenden Proposition wird das Aggregat der aus dem Faktor $\lambda - \lambda_k$ hervorgehenden einfachen Brüche

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1}\left(\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k^m} \cdot \dfrac{1}{\lambda-\lambda_k}\right)}{\partial\lambda_k^{m-1}}.$$

Daher wird das ganze System von einfachen Brüchen, in welche der vorgelegte Bruch aufgelöst wird, dem Aggregat

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} \sum \frac{\partial^{m-1}\left(\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k^m} \cdot \dfrac{1}{\lambda-\lambda_k}\right)}{\partial\lambda_k^{m-1}}$$

gleich, wobei die Summation mit dem Index k über die Werte $1, 2, \cdots n$ erstreckt wird. Nach der Entwicklung nach absteigenden Potenzen von λ erhalten wir diese Proposition:

Nach Entwicklung des Bruchs $\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)]^m}$ *nach absteigenden Potenzen der Größe* λ *wird der Koeffizient des Terms* $\frac{1}{\lambda^p}$ *der Größe*

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\sum\frac{\partial^{m-1}\cdot\frac{\lambda_k^{p-1}\psi(\lambda_k)}{N_k^m}}{\partial\lambda_k^{m-1}}$$

gleich.

Diese Proposition gilt auch, wenn der Grad des Zählers $\psi(x)$ den Grad des Nenners übersteigt; denn in diesem Fall tritt zu den einfachen Brüchen eine ganz rationale Funktion hinzu, welche der Quotient der Teilung ist; aus der Entwicklung der ganz rationalen Funktion können aber keine negativen Potenzen $\frac{1}{\lambda^p}$ hervorgehen, woher die vorhergehende Formel nicht verändert wird. Wenn der Grad des Zählers den des Nenners um i Einheiten übersteigt, ist die vorgelegte Entwicklung frei von den Termen $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\cdots$ $\frac{1}{\lambda^{i-1}}$. In diesem Fall verschwinden also die Größen

$$\sum\frac{\partial^{m-1}\cdot\frac{\lambda_k^{p-1}\psi(\lambda_k)}{N_k^m}}{\partial\lambda_k^{m-1}}$$

für die Werte $1, 2, \cdots, i-1$ von p. Für das Folgende brauchen wir nur die Formel, in welcher $i = 2$, $p = 1$, $m = 2$ ist. Diese gibt das folgende

Lemma

Es sei $\psi(\lambda)$ *eine ganz rationale Funktion der Größe* λ *vom Grad* $2n-2$, *es wird*

$$\sum\frac{\partial\frac{\psi(\lambda_k)}{N_kN_k}}{\partial\lambda_k} = 0$$

sein.

Nach dem Beweis dieses Lemmas kehre ich zur Hauptaufgabe zurück.

3.

Es sei $m-\lambda$ irgendein Faktor der Funktion $f(\lambda)$, woher, nach Setzen von

$$\frac{f(\lambda)}{m-\lambda} = \psi(\lambda),$$

$\psi(\lambda)$ eine ganz rationale Funktion vom Grad $(2n-2)$ wird. Es sei der Kürze wegen

$$\lambda_k^{'} = \frac{d\lambda_k}{dt}, \quad \lambda_k^{''} = \frac{d^2\lambda_k}{dt^2},$$

es wird gemäß der Formel (2.) aus § 1 sein:

$$\frac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda}} = \frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k}.$$

Daher, indem man wieder differenziert und die Werte der Größen λ_1', λ_2' etc. entnommen aus § 1 einsetzt, erhält man:

$$(1.)\quad \frac{d.\frac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}dt} = \frac{\partial\cdot\frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k}}{\partial\lambda_k}\cdot\frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k} + \sum^{i}\frac{\sqrt{\psi(\lambda_i)}}{\sqrt{m-\lambda_i}}\frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{\sqrt{m-\lambda_k}}\cdot\frac{(m-\lambda_i)\partial\frac{1}{N_k}}{N_i\partial\lambda_i},$$

wobei sich das Summationszeichen auf alle Werte 1, 2, 3, $\cdots$, n des darüber geschriebenen Index' erstreckt. Es wird aber

$$\frac{\partial\cdot\frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k}}{\partial\lambda_k}\cdot\frac{\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{N_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial\cdot\frac{\psi(\lambda_k)}{N_kN_k}}{\partial\lambda_k}, \quad \frac{\partial\cdot\frac{1}{N_k}}{\partial\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_k-\lambda_i}\cdot\frac{1}{N_k}.$$

Daher wird aus (1.), unter Berufung auf das bewiesene Lemma,

$$\sum^{k}\frac{d\cdot\frac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}dt} = \sum^{k}\sum^{i}\frac{\sqrt{\psi(\lambda_i)}\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{\sqrt{m-\lambda_i}\sqrt{m-\lambda_k}N_iN_k}\cdot\frac{m-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}.$$

Die Doppelsumme in der vorgehenden Formel erstreckt sich auf alle Werte 1, 2, $\cdots$, n, welche jeder der beiden Indizes i und k annehmen kann, wobei die gleichen Werte $i=k$ ausgeschlossen worden sind. Wenn der hinter den zwei Summationszeichen platzierten Größe eine andere aus der Vertauschung der Indizes i und k hervorgehende hinzugefügt wird, muss die Summe nur auf die verschiedenen Kombinationen der Indizes 1, 2, $\cdots$, n ausgedehnt werden, sodass aus den Festlegungen $i=\alpha$, $k=\beta$ und $i=\beta$, $k=\alpha$ nur eine zu wählen ist. Wenn wir das bezüglich der Doppelsumme festlegen und bemerken, dass $\frac{m-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}+\frac{m-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}=1$ wird, geht der vorherige Ausdruck in diesen über:

$$(2.)\quad \sum^{k} \frac{d \cdot \frac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}dt} = \sum^{k}\sum^{i} \frac{\sqrt{\psi(\lambda_i)}\sqrt{\psi(\lambda_k)}}{\sqrt{m-\lambda_i}\sqrt{m-\lambda_k}N_iN_k} = \sum^{k}\sum^{i} \frac{\lambda_i'\lambda_k'}{(m-\lambda_i)(m-\lambda_k)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2} + \cdots + \frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right]^2 \\ &- \left[\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right]. \end{aligned}$$

Es wird aber

$$\sum^{k} \frac{d \cdot \frac{\lambda_k'}{\sqrt{m-\lambda_k}}}{\sqrt{m-\lambda_k}dt} = \sum^{k}\left[\frac{\lambda_k''}{m-\lambda_k} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_k'\lambda_k'}{(m-\lambda_k)^2}\right].$$

Daher geht Gleichung (2.) in diese über:

$$\begin{aligned} (3.)\qquad 0 = &\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2} + \cdots + \frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right)^2 \\ &- \left(\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right) \\ &- \left(\frac{\lambda_1''}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2''}{m-\lambda_2} + \cdots + \frac{\lambda_n''}{m-\lambda_n}\right). \end{aligned}$$

Man setze

$$(4.)\qquad y = \sqrt{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\cdots(m-\lambda_n)};$$

wenn darüber hinaus $u = \log y$ wird, wird

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2}\right]$$

sein. Es wird aber

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2} + \cdots + \frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right),$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1''}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2''}{m-\lambda_2} + \cdots + \frac{\lambda_n''}{m-\lambda_n}\right);$$

daher geht Gleichung (3.), durch 2 geteilt, in diese über:

$$0 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2}$$

oder

$$(5.) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Nach Integrieren dieser Formel und Einsetzen der Werte, $\lambda_k' = \frac{\sqrt{f(\lambda_k)}}{N_k}$, erhält man aus (4.):

$$(6.) \qquad -2\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)N_2} + \cdots + \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right) = \text{Konst.}$$

Diese Formel legt das algebraische Integral der vorgelegten Differentialgleichungen fest, und aus ihm werden $2n-1$ algebraische Integrale für die linearen Faktoren $m-\lambda$ der Funktion $f(\lambda)$ erhalten. Die Zahl $n-1$ reicht aber aus, um algebraische Gleichungen zwischen den n Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ zu konstruieren. Ich werde hier nicht bei der Formel

$$\text{Konst.} = y\left(\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)N_2} + \cdots + \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right),$$

welche aus dem Abel'schen Theorem abzuleiten ist, verweilen. Dies findet man beim hoch geehrten Richelot in einer außerordentlichen Abhandlung, in welcher er die für den Fall $n=2$ dargebotene Lagrange'sche Methode zur Integration erweitert und mithilfe seiner Methode zwei algebraische Integrale für irgendeinen Wert von n, sogar für eine allgemeine Form der Funktion $f(\lambda)$ findet. Und zufällig kann auch die zuvor von mir genutzte Methode, mit welcher alle algebraischen Integrale erhalten werden, für eine Erweiterung der LAGRANGE'schen Methode gehalten werden.

Wenn man $f(\lambda)$ eine ganz rationale Funktion von $2n$-ter Ordnung zuteilt, führt man durch die offensichtliche Substitution $\lambda = \frac{m+nz}{1+pz}$ das Problem auf den Fall zurück, in welchem $(2n-1)$-ter Ordnung ist. In jenem allgemeinen Fall verschwindet die Summe

$$\sum^{k} \frac{\partial \cdot \frac{\psi(\lambda_k)}{N_k N_k}}{\partial \lambda_k}$$

nicht weiter, sondern die Summe, weil gemäß dem, was ich in § 2. bewiesen habe, sie dem Koeffizienten des Terms $\frac{1}{\lambda}$ in der Entwicklung der Größe

$$\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)]^2}$$

gleich wird, ist gleich einer Konstante $-c$, wenn freilich $c\lambda^{2n}$ der höchste Term der Funktion $f(\lambda)$ ist. Daher muss die vorhergehende Gleichung

$$0 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2}$$

in diese verwandelt werden:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{4}c;$$

daher folgt diese Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{4}cy,$$

welche mit $2\frac{dy}{dt}$ multipliziert und integriert diese an die Hand gibt:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}cyy + \alpha,$$

während α eine beliebige Konstante bezeichnet. Wenn in diese Formel die Werte (4.) und (6.) der Größen y und $\frac{dy}{dt}$ eingesetzt werden, gehen die der allgemeineren Form der Funktion $f(\lambda)$ entsprechenden Integrale hervor.

4.

Anstelle eines Schlussschnörkels füge ich hier folgendes hinzu. *Eine Funktion welchen Grades auch immer die Funktion $f(\lambda)$ war*, wenn, während $m-\lambda$ irgendeinen Faktor von ihr bezeichnet, wir (m) dem Koeffizienten des Terms $\frac{1}{\lambda}$ in der Entwicklung der Größe

$$\frac{\frac{f(\lambda)}{m-\lambda}}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)]^2}$$

nennen, suggeriert die im Vorausgehenden verwendete Analysis die Formel:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{4}(m)=0.$$

Daher, nach Multiplikation mit y, geht hervor:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{4}y(m)=0.$$

Es sei y_1 eine andere Funktion, welche dem Faktor $m_1-\lambda$ von $f(\lambda)$ zukommt, sodass man hat:

$$y=\sqrt{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\cdots(m-\lambda_n)},\quad y_1=\sqrt{(m_1-\lambda_1)(m_1-\lambda_2)\cdots(m_1-\lambda_n)},$$

es wird sein:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{4}y(m)=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{4}y_1(m_1)=0,$$

woher:

$$y\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{4}yy_1[(m_1)-(m)]=0.$$

Weil

$$\frac{1}{m_1-\lambda}-\frac{1}{m-\lambda}=\frac{m-m_1}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)}$$

ist, wird $(m_1)-(m)$ dem Koeffizienten des Terms $\frac{1}{\lambda}$ in der Entwicklung der Größe

$$\frac{\frac{f(\lambda)}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)}}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)]^2},$$

multipliziert mit $m - m_1$, gleich. Diesen Koeffizienten bezeichne ich mit (m, m_1), woher

$$y\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m-m_1}{4}yy_1(m, m_1) = 0$$

wird, und nach Integration

$$(1.) \qquad y\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy}{dt} + \frac{m-m_1}{4}\int yy_1(m, m_1)dt = 0.$$

Diese Formel lehrt, *dass das Integral* $\int yy_1(m, m_1)dt$ *einen algebraischen Wert erhält.* Es sei eines Beispiels wegen $f(\lambda)$ vom Grad $(2n+1)$ und ihr höchster Term $c\lambda^{2n+1}$, es wird $(m, m_1) = c$ sein, und daher findet man durch Einsetzen der Formel (6.) des ersten §:

$$(2.) \qquad c\int yy_1dt = \frac{-4}{m-m_1}\left[y\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy}{dt}\right]$$

$$= 2yy_1\left[\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)(m_1-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{f(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)(m_1-\lambda_2)N_2} + \cdots + \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)(m_1-\lambda_n)N_n}\right].$$

Wenn $m = m_1$ und

$$\sqrt{f(\lambda)} = (m-\lambda)\sqrt{F(\lambda)}$$

ist, geht die vorhergehende Gleichung in diese über:

$$(3.) \qquad c\int(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\cdots(m-\lambda_n)dt$$

$$= 2(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\cdots(m-\lambda_n)\left[\frac{\sqrt{F(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{F(\lambda_2)}}{(m-\lambda_2)N_2} + \cdots + \frac{\sqrt{F(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right].$$

Es ist zuträglich, in dieser neuen Klasse von Formeln ein Beispiel hinzuzufügen. Es sei, was freilich das einfachste ist,

$$\sqrt{f(\lambda)} = \sqrt{\lambda^5},$$

woher

$$m = 0, \quad c = 1, \quad \sqrt{F(\lambda)} = -\sqrt{\lambda^3};$$

die vorgelegten Differentialgleichungen werden sein:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^5}} + \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^5}} = 0, \quad \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^3}} + \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^3}} = dt,$$

aus welchen gemäß (3.) werden muss:

$$\int \lambda_1\lambda_2 dt = 2\lambda_1\lambda_2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}.$$

Die vorgelegten Differentialgleichungen geben:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^3}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^3}} = \alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -\frac{1}{2}t,$$

während α eine beliebige Konstante bezeichnet; daher, durch Setzen von $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = u$, wird:

$$\alpha = -\frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{2}tu, \quad \int \lambda_1\lambda_2 dt = \int \frac{dt}{uu} = \frac{9}{4}\int \frac{t^2 dt}{\left(\alpha + \frac{1}{8}t^3\right)^2} = \frac{-6}{\alpha + \frac{1}{8}t^3}.$$

Es wird aber $\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} = -\frac{1}{2}t\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, woher $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} = -\frac{2}{tu} = -\frac{-3}{\alpha+\frac{1}{8}t^3}$, und daher

$$\int \lambda_1\lambda_2 dt = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{q.d.e.}$$

Königsberg, am Tage des 5. Mai 1842.